

# 三波エネルギー伝達関数の対称化と有向表現

## Symmetrization and directional representation of triad energy transfer function

○ 前山伸也, 名大理, 名古屋市千種区不老町, smaeyama@p.phys.nagoya-u.ac.jp  
Shinya Maeyama, Dept. Phys, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoy, Japan

This study discusses triad transfer analysis via quadratic nonlinearity. Importance of symmetrization of the transfer function is reviewed to avoid fictitious interactions. Newly proposed directional representation of transfer function describes energy transfer as one-to-one relation. The avoidance of fictitious interactions and consistency of the directional representation with the symmetrized transfer are shown in network graph visualization. An application to the plasma turbulence analysis is demonstrated.

### 1. 研究背景

中性流体では運動方程式の移流項 $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ 、電磁流体力学では移流項に加えて Lorentz 力や Faraday 則に現れる $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B}$  (ここで、 $\mathbf{v}$ は流速、 $\mathbf{B}$ は磁場) など、様々な乱流は二次の非線形性に起因する。典型的な波や渦の構造を抽出するために、何らかの直交関数展開を用いると、二次の非線形性によるエネルギー伝達は異なるモード間の三つ組み相互結合として記述される。

乱流の研究では古くから三つ組み相互作用の対称性について注意が払われ、対称化エネルギー伝達関数が解析されてきた。<sup>(1,2)</sup> 一方で、三つ組み相互作用の解析の難しさを回避するために、非対称エネルギー伝達関数の反対称性を拠り所として 1 対 1 相互作用によりモード間結合を表す提案<sup>(3)</sup> がなされ、特に電磁流体力学的乱流や微視的プラズマ乱流の研究で広く用いられてきた経緯がある。<sup>(4-8)</sup> 一方、筆者の関連グループではプラズマ乱流においても対称化伝達関数に基づく解析を行ってきた。<sup>(9,10)</sup> 最近、非対称エネルギー伝達関数の不定性の問題と対称化の重要性を再訪しつつ、対称化エネルギー伝達関数と整合した 1 対 1 相互作用として記述する三つ組み相互作用の有向表現を提案する論文をまとめた。<sup>(11)</sup> 上記論文は主としてプラズマ分野向けに書かれたものであるが、定式化は中性流体にもそのまま適用可能な一般的な表式であるので本学会の方々であれば差し障りなく議論を迫るはずであるし、本講演を通じて流体分野の研究者の方々にお諮りしたい。

### 2. 二次の非線形性による三つ組みエネルギー伝達過程

乱流揺らぎ $f(t, \mathbf{x})$ が以下のモデル方程式で表される系に従うとする。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = N(f, f) + L(f) \quad (1)$$

ここで、 $L(\cdot)$ は線形作用素で乱流の駆動や散逸の効果を含むが、議論の主眼ではないので、以下では省略する。 $N(\cdot, \cdot)$ は二次の非線形作用素であり、エネルギー保存則 $\int f N(f, f) dx = 0$ を満たす。

乱流揺らぎを任意の直交関数展開により分解する。

$$f(t, \mathbf{x}) = \sum_k f_k(t, \mathbf{x}) \quad (2)$$

ここで、 $k$ は展開するモードの自由度であり、直交条件は $k \neq p$ に対し $\int f_k f_p dx = 0$ で定義する。この時、エネルギー $E = \frac{1}{2} \int f^2 dx$

は各モードのエネルギー $E_k = \frac{1}{2} \int f_k^2 dx$ の和として表される。

式(2)の展開を式(1)に適用すると、各モードのエネルギーの時間発展方程式は以下ようになる。

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} = T_k \quad (3)$$

ここで、モード $k$ に対する全エネルギー伝達

$$T_k = \sum_p \sum_q W_k^{p,q} \quad (4)$$

はエネルギー保存則 $\sum_k T_k = 0$ を満たす。三つ組み相互作用

$$W_k^{p,q} = \int f_k N(f_p, f_q) dx \quad (5)$$

は素朴には対称性も反対称性も持たず、 $(k, p, q)$ の三つ組み相互作用において、あるモード $k$ が他のモード $p, q$ から2通りの寄与 $W_k^{p,q}$ ,  $W_k^{q,p}$ を受ける[Fig. 1 (a)]。これらの対は必ず存在するので、素朴な伝達関数 $W_k^{p,q}$ の $p, q$ に反対称成分は打ち消しあい、エネルギー伝達に寄与しないことが分かる。このため、対称化伝達関数を以下で定義する。

$$\begin{aligned} S_k^{p,q} &= \frac{1}{2} (W_k^{p,q} + W_k^{q,p}) \\ &= \frac{1}{2} \int f_k [N(f_p, f_q) + N(f_q, f_p)] dx \end{aligned} \quad (6)$$

定義から対称性 $S_k^{p,q} = S_k^{q,p}$ を持つ。また、三つ組み $(k, p, q)$ 間のエネルギー保存則を表す詳細つり合い

$$S_k^{p,q} + S_p^{q,k} + S_q^{k,p} = 0 \quad (7)$$

を満たす。Fig. 1 (b)に示す通り、対称化伝達関数 $S_k^{p,q}$ はあるモード $k$ が他のモード $p, q$ との結合で受け取る正味のエネルギー伝達を表す。

ところで、二次の非線形作用素 $N(\cdot, \cdot)$ の性質によっては、素朴な伝達関数 $W_k^{p,q}$ が $k, q$ の入れかえに対して反対称性を持つ場合がある。あるいは反対称性を持つような伝達関数 $A_k^{p,q} = -A_q^{k,p}$ を上手く見つける。このような非対称伝達関数 $A_k^{p,q}$ を、モード $p$ を仲介とするモード $q$ からモード $k$ への1対1伝達として見なそうというのが非対称伝達関数を解析に用いる場合の論旨である。<sup>(9)</sup> Fig. 1 (c)に模式図を示したが、三つ組み間のエネルギー伝達を1対1伝達の組み合わせで表そうとする場合、正味のエネルギー伝達に寄与しない三つ組み間の循環に任意性が存在し、一意に定まらないため、見かけの相互作用が現れ得る。

### 3. 1対1伝達関数の不定性

上述のように、三つ組み相互作用を1対1伝達で表そうとする場合には循環に関する不定性が存在する。無理に1対1伝達で表さずに対称化伝達関数のみ解析すればよい、というのは一つの正しい方針である。<sup>(9,10)</sup> 一方、対称伝達関数では、 $S_k^{p,q}$ の符号を見てもモード $k$ がモード $p, q$ のどちらから受け取った、という情報はなく、詳細つり合い式(7)を調べて判断する必要がある。そのため、モード間のエネルギー伝達経路を評価しようとする場合、1対1伝達で表せるほうが都合がよい。

1対1伝達関数を決定するうえで、上述のように発見的に、あるいは解析者が恣意的に選んだものが Dar らの非対称伝達関数  $A_k^{p,q}$  であるといえる。<sup>(3)</sup>

小布施らは、反対称性を持ち  $C_k^{p,q} = -C_q^{p,k}$ 、詳細つり合い

$$C_k^{p,q} + C_p^{q,k} + C_q^{k,p} = 0 \quad (8)$$

を満たす非対称伝達関数を、実効エネルギー伝達(Effective energy transfer, EET)と定義している。エネルギー収支の整合性から、対称化伝達関数を用いて以下の通り計算される。

$$C_k^{p,q} = \frac{1}{3}(S_k^{p,q} - S_q^{k,p}) \quad (9)$$

この実効エネルギー伝達において、保存性は反対称性により担保されており、上記の詳細つり合い式(8)は、三つ組みをつなぐ経路を一周する向きにエネルギー伝達を足し合わせた際の循環が0となるように選んだことに相当する。Fig. 1 (d)は、Fig. 1 (b)と対応するように描かれた実効エネルギー伝達であり、確かに循環が0となっていることが確認できる。循環を0とするために、モードq

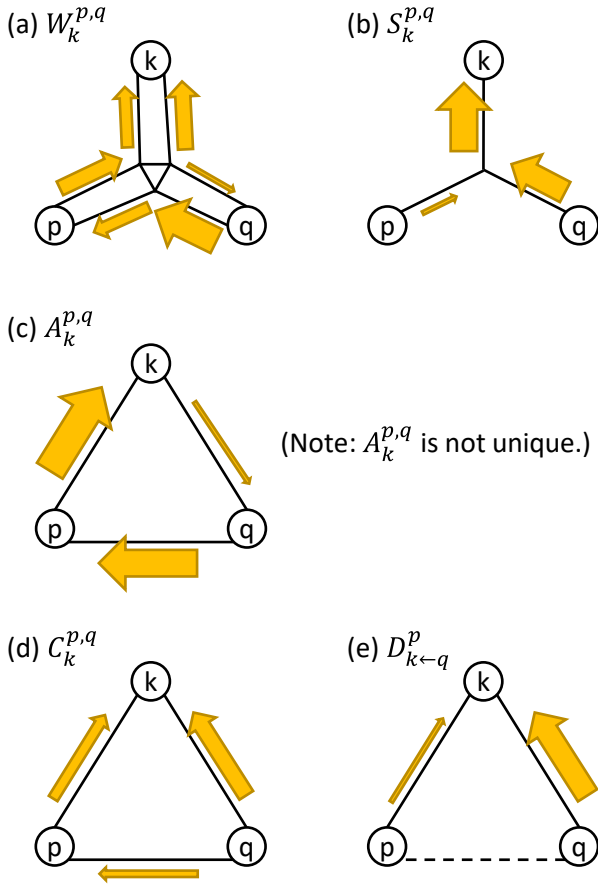


Fig. 1 Schematic pictures of energy transfer among a triad coupling  $k, p, q$  for (a) the naive triad transfer function  $W_k^{p,q}$ , the symmetrized triad transfer function  $S_k^{p,q}$ , (c) the non-symmetric triad transfer function  $A_k^{p,q}$ , (d) Obuse's effective energy transfer<sup>(12)</sup>  $C_k^{p,q}$ , and (e) Maeyama's directional representation<sup>(11)</sup>  $D_{k←q}^p$ . Modes  $k, p, q$  are drawn as circles, and transfer paths are drawn as black lines. Arrows represent an example of energy transfer processes, whose width is corresponding to the amplitude. For example, in (b) arrow widths to the mode  $k, p$ , and  $q$  are respectively 0.7mm, 0.1mm, and 0.6mm, consistent with the detailed balance  $S_k^{p,q} + S_p^{q,k} + S_q^{k,p} = 0$ .

からモードpへの伝達が生じている。

一方、対称化伝達関数 Fig. 1 (b)を見て解析者が読み取れることは、「モード  $p, q$  の両方からモード  $k$  がエネルギーを受け取っている」ことではないだろうか。あるいは  $S_k^{p,q}$  の正味の授受が小さいことに着目すると、「モード  $p$  はほぼ仲介役として働き、モード  $q$  からモード  $k$  へ主にエネルギー伝達が起こっている」ともいえる。Fig. 1 (b)から、モード  $q$  からモード  $p$  へとエネルギー伝達された、とは読み取らないのではないだろうか。

対称化伝達関数で表される正味の伝達量に着目すると、Fig. 1 (c) や Fig. 1 (d) のモード  $p$  に見られるような、単一のモードへのエネルギーの出入りが合っても、それらは正味打ち消しあい、残った分だけしかモードの増減に寄与しないことが分かる。そこで、モード  $p$  を介したモード  $q$  からモード  $k$  への三つ組みエネルギー伝達関数の有向表現  $D_{k←q}^p$  を以下により新たに定義した。<sup>(11)</sup>

- 反対称性 (モード  $k, q$  間の保存則) :

$$D_{k←q}^p = -D_{q←k}^p \quad (10)$$

- 正味エネルギー収支の無矛盾性 :

$$S_k^{p,q} = \frac{1}{2}(D_{k←q}^p + D_{k←p}^q) \quad (11)$$

- 単一モードに同時にエネルギーの授受がない :

$$D_{k←q}^p = 0 \text{ [if } \text{sgn}(S_k^{p,q}) = \text{sgn}(S_q^{k,p})] \quad (12)$$

最後の式(12)の条件は、等価な表現として、「エネルギーを受け取るモードは受け取るだけ、渡すモードは渡すだけ」、または、「L1 ノルム  $|D_{k←q}^p| + |D_{p←k}^q| + |D_{q←p}^k|$  の最小化」、または、「三つ組みの経路の内の一つを断ち切り、ネットワークの経路の数を最小化する」条件ともいえる。Fig. 1 (e) に示す通り、有向表現  $D_{k←q}^p$  は対称化伝達関数  $S_k^{p,q}$  と無矛盾に、「モード  $p, q$  の両方からモード  $k$  がエネルギーを受け取っている」「モード  $p$  はほぼ仲介役として働き、モード  $q$  からモード  $k$  へ主にエネルギー伝達が起こっている」ことを自然に表している。

#### 4. 具体例

非圧縮性流体を考え、乱流揺らぎとして流速  $f = \mathbf{v}$ 、二次の非線形作用素として移流項  $N(f, f) = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$  を用いると、素朴なエネルギー伝達関数は

$$W_k^{p,q} = \int \mathbf{v}_p \cdot (\nabla \mathbf{v}_q) \cdot \mathbf{v}_k dx$$

はである。対称化伝達関数は

$$S_k^{p,q} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{v}_p \cdot (\nabla \mathbf{v}_q) + \mathbf{v}_q \cdot (\nabla \mathbf{v}_p)] \cdot \mathbf{v}_k dx$$

となり、詳細つり合い式(7)を満たす。

非圧縮条件  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ 、および、適切な境界条件の下で、素朴な

エネルギー伝達関数は反対称性  $A_k^{p,q} = -A_q^{p,k}$  を満たすので、

$A_k^{p,q} = W_k^{p,q}$  として非対称伝達関数が定義される。

小布施らの実効エネルギー伝達は式(9)により、

$$C_k^{p,q} = \frac{1}{6} \int [\mathbf{v}_p \cdot (\nabla \mathbf{v}_q) + \mathbf{v}_q \cdot (\nabla \mathbf{v}_p)] \cdot \mathbf{v}_k$$

$$- [\mathbf{v}_k \cdot (\nabla \mathbf{v}_p) + \mathbf{v}_p \cdot (\nabla \mathbf{v}_k)] \cdot \mathbf{v}_q dx$$

で得られる。

有向表現  $D_{k←q}^p$  は式(12)の符号の判定のために、単純な算術的に

表しがたいが、式(10)-(12)に従い、対称化伝達関数 $S_k^{p,q}$ から計算される。Fig. 1 (b), (c)を見比べるとわかるように、 $S_k^{p,q}$ ,  $S_p^{q,k}$ ,  $S_q^{k,p}$ の内、絶対値の小さい2つの値を使って1対1伝達過程が表される。

## 5. まとめ

本研究では、二次の非線形性に起因する三つ組み相互作用のエネルギー伝達過程について調べ、対称化の重要性と、対称化伝達関数と無矛盾な1対1伝達解析として三つ組み相互作用の有向表現を新たに提案した。講演では、プラズマ乱流の解析に適用した結果についてグラフ可視化を用いて示し、その有効性を議論する。

## 参考文献

- (1) Kraichnan, R. H., "The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers", *J. Fluid Mech.*, 5 (1959) 497.
- (2) Ohkitani, K. and Kida, S., "Triad interactions in a forced turbulence", *Phys. Fluids A*, 4 (1992) 794.
- (3) Dar, G., Verma, M. K. and Eswaran, V., "Energy transfer in two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence: formalism and numerical results", *Phys. D*, 157 (2001) 207.
- (4) Mininni, P. D., Alexakis, A. and Pouquet, A., "Shell-to-shell energy transfer in magnetohydrodynamics. II. Kinematic dynamo", *Phys. Rev. E*, 72 (2005) 046302.
- (5) Holland, C., Tynan, G. R., Fonck, R. J., McKee, G. R., Candy, J. and Waltz, R. E., "Zonal-flow-driven nonlinear energy transfer in experiment and simulation", *Phys. Plasmas*, 14 (2007) 056112.
- (6) Navarro, A. B., Teaca, B., Jenko, F., Hammett, G. W., Happel, T. and ASDEX Upgrade Team, "Applications of large eddy simulation methods to gyrokinetic turbulence", *Phys. Plasmas*, 21 (2014) 032304.
- (7) Teaca, B., Jenko, F. and Told, D., "Gyrokinetic turbulence: between idealized estimates and a detailed analysis of nonlinear energy transfers", *New J. Phys.*, 19 (2017) 045001.
- (8) Meyrand, R., Kiyani, K. H., Gürçan, Ö. D. and Galtier, S., "Coexistence of Weak and Strong Wave Turbulence in Incompressible Hall Magnetohydrodynamics", *Phys. Rev. X*, 8 (2018) 031066.
- (9) Nakata, M., Watanabe, T.-H. and Sugama, H., "Nonlinear entropy transfer via zonal flows in gyrokinetic plasma turbulence", *Phys. Plasmas*, 19 (2012) 022303.
- (10) Maeyama, S., Watanabe, T.-H., Idomura, Y., Nakata, M., Ishizawa, A. and Nunami, M., "Cross-scale interactions between turbulence driven by electron and ion temperature gradients via sub-ion-scale structures", *Nucl. Fusion*, 57 (2017) 066036.
- (11) Maeyama, S., Sasaki, M., Fujii, K., Kobayashi, T., Dendy, R. O., Kawachi, Y., Arakawa, H. and Inagaki, S., "On the triad transfer analysis of plasma turbulence: symmetrization, coarse graining, and directional representation", *New J. Phys.*, 23 (2021) 043049.
- (12) Obuse, K. and Yamada, M., "Energy Transfer to Resonant Zonal Rossby Modes in Two-Dimensional Turbulence on a Rotating Sphere", *J. Phys. Soc. Jpn.*, 89 (2020) 064401.